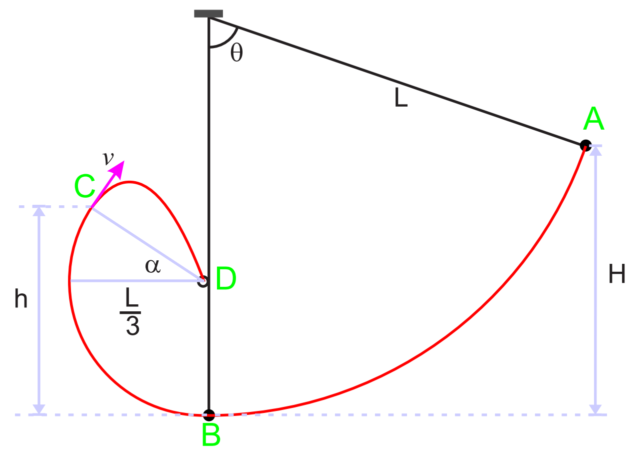
PENDULO TRUNCADO

Por Fernando Vega S.

Se llama péndulo truncado a un péndulo que al oscilar, la cuerda se tranca con un obstaculo en el punto D llamado puntilla que causa que las oscilaciones a un lado (lado izquierdo en este caso) sean con un tramo de cuerda menor. Desde qué ángulo θ es necesario soltar un péndulo, para que la lentejuela choque con la puntilla en D. Asuma que la distancia BD es un tercio de la cuerda.



La lentejuela hace una trayectoria como la curva roja, circula con radio *L* de A a B y circular de B a C con radio *L*/3. De C a D es una trayectoria parabólica.

Del punto A al punto C se cumple que:

$$mgH \quad mgh+\frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

En el punto C tenemos que:

$$mg\sin \quad +T=3\frac{mv^2}{L} \qquad (2)$$

Si asumimos que a partir de C la cuerda se distiende entonces tomamos la tensión *T* = 0, se obtiene que:

$$v^{\text{Č}}=\frac{gL\sin}{3} \qquad (3)$$

$$H=h+\frac{L\text{ŒÕ}}{6} \qquad (4)$$

De C a D aplican las siguientes ecuaciones cinemáticas:

$$x-x_{\text{ć}}=v\sin \quad \cdot\tau \qquad (5)$$

$$y-y_0=v\cos\alpha\cdot\tau-\frac{g}{2}\text{č} \qquad (6)$$

De (6) $$=\frac{x-x_{\text{ć}}}{v\sin\alpha} \qquad (7)$$

Colocando (7) en (6) obtenemos la ecuación de la parábola.

$$y-y_{\text{ć}}=\left(x-x_0\right)\cdot\text{ctg} \quad -\frac{g}{2v^2\sin^2\alpha}\left(x-x_0\right)^2 \qquad (8)$$

De la gráfica.

$$x-x_{\text{ć}}=\frac{L}{3}\cos \qquad y-y_{\text{ć}}=0-\frac{L}{3}\sin \qquad (9)$$

Estas dos expresiones (9) en (8) nos dan:

$$-\sin\alpha=\frac{\cos^{\text{č}}}{\sin\alpha}-\frac{g\cos^2\alpha}{2v^2\sin^2\alpha}\frac{L}{3}$$

que se reduce a

$$-\tan^{\text{č}} \quad =1-\frac{gL}{6v^2\sin\alpha}$$

Reemplazamos *v* de (3).

$$\tan^{\text{č}} \quad =\frac{1}{2\sin^2\alpha}-1$$

Haciendo uso de identidades trigonométricas:

$$\frac{\sin}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1}{2\sin^{\text{č}}\alpha}-1$$

Si reemplazamos $u=\text{ŒÕ}$

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \quad \frac{1}{2u^2}-1 \quad \Rightarrow \quad 2u^{\text{ċ}}=\left(1-2u\right)\sqrt{1-u^2}$$

Esta es una ecuación de 3er grado que podemos solucionar con una calculadora avanzada.

$$u=\text{Œn} \quad =0.549$$

Entonces:

$$=\text{ĊĊĈ}°$$

EJERCICIO : Demuestre que este ángulo se obtiene para cualquier *n* tal que la distancia BD sea *L*/*n*.

Ahora hallamos la relación entre los ángulos α y θ. De la figura se obtiene que:

$$h = \frac{L}{3} + \frac{L}{3}\sin$$

Que colocada en (4) nos da:

$$H = L\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sin \quad \right) \qquad (10)$$

Es claro que

$$\cos \quad = \frac{L-H}{L} = 1 - \frac{H}{L}$$

Con (10) en esta última ecuación:

$$\cos \quad = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\sin\alpha \qquad (11)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\cdot 0.549\right) = 66.9°$$

EJERCICIO : Halle una expresión para θ en función de *n* tal que la distancia BD sea *L*/*n*.

La siguiente gráfica representa el ángulo θ en función de *n* donde la distancia BD es *L*/*n.*