Constante de un resorte

Por Fernando Vega Salamanca

El objetivo es encontrar experimentalmente la constante de un resorte, para lo cual mostramos varios procedimientos.

1.0 Con ayuda de la Ley de Hook

En este apartado utilizamos la Ley de Hook. Suspendemos del resorte diversas masas *m* y medimos la elongación *x* del resorte.

$$kx = mg \tag{1}$$

Representada de la siguiente manera se aprecia como la ecuación de la recta

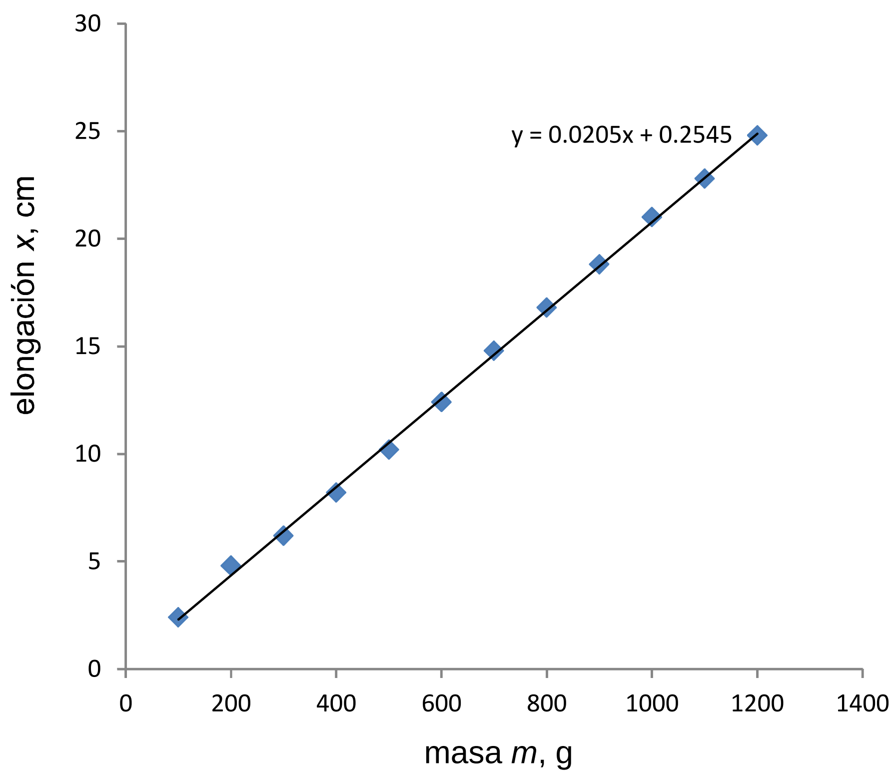
$$x = \frac{g}{k} m \tag{2}$$

Donde $\frac{g}{k}$ es la pendiente.

A continuación aparecen la tabla de datos y la gráfica *x* vs *m*.

Tabla 1

***m* ± 1% (g)**	***x* ± 0,2 (cm)**
100	2,4
200	4,8
300	6,2
400	8,2
500	10,2
600	12,4
700	14,8
800	16,8
900	18,8
1000	21,0
1100	22,8
1200	24,8



En todas las gráficas se expresa la ecuación para la curva de tendencia dadas por el computador, pero no las utilizamos, sirve a manera de comparación. El mérito de la práctica es hacer individualmente el análisis.

La pendiente se puede hallar trazando una recta y hallando manualmente la pendiente. En este ejemplo la calidad de los puntos ayudan.

Sin embargo usaremos la función regresión lineal de una calculadora científica común.

La regresión nos da la siguiente ecuación de una recta

$$x = 0,254 + 0,0205m. \qquad (*)$$

Con pendiente $a = 0,0205.$

Asi que igualando la pendiente obtenida con la de la ecuación (2) tenemos:

$$k = \frac{g}{a} = \frac{977}{0,0205}\frac{\text{din}}{\text{cm}} \approx 47700\frac{\text{din}}{\text{cm}} = \boxed{47,7\frac{\text{N}}{\text{m}}.}$$

Nótese que hemos estado usando 3 cifras significativas**. El valor de la gravedad para Bogotá es 9,77 m/s^2 (http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php).

---

*Con la ecuación de la recta se puede dibujar sobre los puntos la recta teórica.

**Efectivamente de (2) si tomamos de la tabla una medida *m* = 1000 $\pm 1\%$ g y *x* = 21,0 $\pm$ 0,2 cm para calcular un resultado parcial obtenemos de

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta m}{m}$$

que

$$k = 46523\frac{\text{din}}{\text{cm}}. \qquad \Delta k = 46523\left(\frac{0,2}{21} + 0,01\right) = 908 \approx 900\frac{\text{din}}{\text{cm}}.$$

Así que

$$k = 46,5 \pm 0,9\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

3 cifras significativas

1.1 Análisis estadístico del error (análisis opcional)

De teoría de errores se utilizan las siguientes expresiones para hallar la incertidumbre en el resultado que acabamos de obtener, utilizando el método de mínimos cuadrados.

$$\langle X \rangle = \frac{\sum x_i}{N} \qquad S_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \langle X \rangle^2 \qquad R_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle$$

$$\langle Y \rangle = \frac{\sum y_i}{N} \qquad S_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \langle X \rangle^2$$

$$a = \frac{R_{xy}}{S_x^2} \qquad b = \langle Y \rangle - a \langle X \rangle$$

$$\Delta a = 2\sqrt{\frac{1}{N-2}\left(\frac{S_y^2}{S_x^2} - a^2\right)} \qquad \Delta b = \Delta a \sqrt{S_x^2 + \langle X \rangle^2}$$

<X>	=650
<Y>	=13.6
S_x^2	=119166.6667
S_y^2	=50.28
R_{xy}	=2446.666667
a	=0.020531469
b	=0.254545455
Δa	=0.000394396
Δb	=0.290267357

Resultados obtenidos para las expresiones de arriba con los datos de la tabla 1. *Nótese los valores de a y b que coinciden con los valores obtenidos.*

Ajustando las cifras significativas este es el resultado para la pendiente:

$$a = (0,0205 \pm 0,0004)\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{g}}$$

De la expresión $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta a}{a}$ hallamos

$$\Delta k = 47707\left(\frac{0,0004}{0,0205}\right) = 930\,\tfrac{\mathrm{din}}{\mathrm{cm}} \approx 900\,\tfrac{\mathrm{din}}{\mathrm{cm}}$$

Llegamos entonces a que nuestro resultado es:

$$k = (47,7 \pm 0,9)\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\frac{0,9}{47,7}100\% = 1,8\%$$

2.0 Con ayuda del periodo

En este apartado utilizamos la expresión para el periodo de una masa suspendida de un resorte.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3}$$

Para reducir el error efectuamos 20 oscilaciones y registramos su tiempo $t = 20T$.

$$t = 40\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4}$$

Calculamos t^2 y $\sqrt{m}$ para utilizar en los siguientes numerales.

Tabla 2

***m* ± 1 % (g)**	***t* ± 0,1 (s)**	***t*² (s²)**	$\sqrt{m}\ (\sqrt{g})$
500	12,9	166	22,4
600	14,3	204	24,5
700	15,2	231	26,5
800	16,2	262	28,3
900	17,3	299	30,0
1000	18,6	346	31,6
1100	19,2	369	33,2
1200	20,1	404	34,6
1300	21,1	445	36,1
1400	21,3	454	37,4

Nótese que hemos usado tres cifras significativas en las columnas calculadas.

2.1 Usando la proporcionalidad de potencia

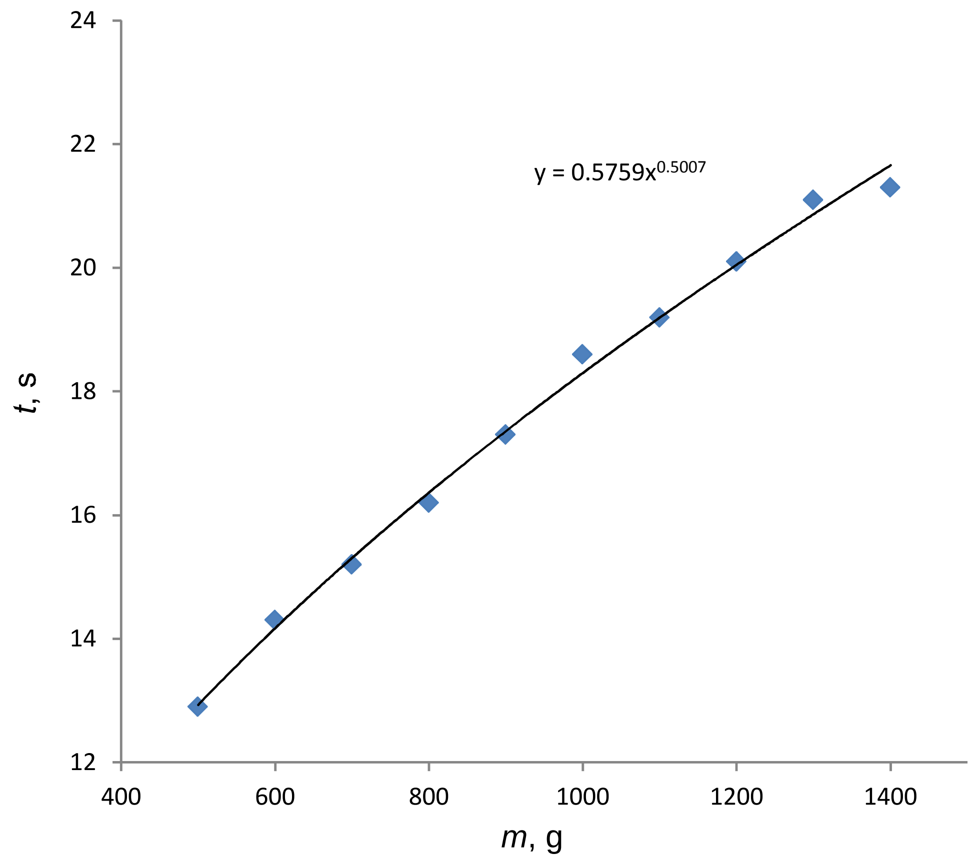
Acomodamos la expresión (4) de tal manera que se nota de la forma $y = Cx^n$ que es una proporción de potencia,

$$t = \frac{40\pi}{\sqrt{k}} m^n \tag{5}$$

tal que la constante

$$C = \frac{40\pi}{\sqrt{k}}. \tag{6}$$

Graficamos *t* vs *m*. Tenga en cuenta que la variable independiente es la masa y la variable dependeinte es el tiempo.



Con ayuda de la calculadora científica utilizamos la regresión de potencia y obtenemos la parte constante *C* = 0,576 y el exponente *n* = 0,500. Despejamos *k* de (6).

$$k = \left(\frac{40\pi}{C}\right)^2 \approx 47500\,\frac{\text{din}}{\text{cm}} = \boxed{47,5\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}.$$

Verificamos cuántas cifras significativas podemos usar. Usando el dato para la masa m = 1000 ±1% g y $t = 18,6 \pm 0,1\,\text{s}$

$$k = \frac{(40\pi)^2 m}{t^2} = \frac{(40\pi)^2 \cdot 1000}{(18,6)^2} = 45598\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\frac{\Delta k}{k} = \left(\frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta t}{t}\right) \Rightarrow \Delta k = 45598\left(0,01 + 2\frac{0,1}{18,6}\right) = 701 \approx 700\,\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

$k = 45600 \pm 700\,\frac{\text{din}}{\text{cm}}$. Los ceros no son significativos. $k = 45,6 \pm 0,7\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$.

2.2 Usando la linealización del tiempo

Acomodamos la expresión (4) de tal manera que se nota de la forma $y = a + bx$ que es una proporción lineal, para esto elevamos ambos lados al cuadrado

$$t^2 = \frac{(40\pi)^2}{k} m$$

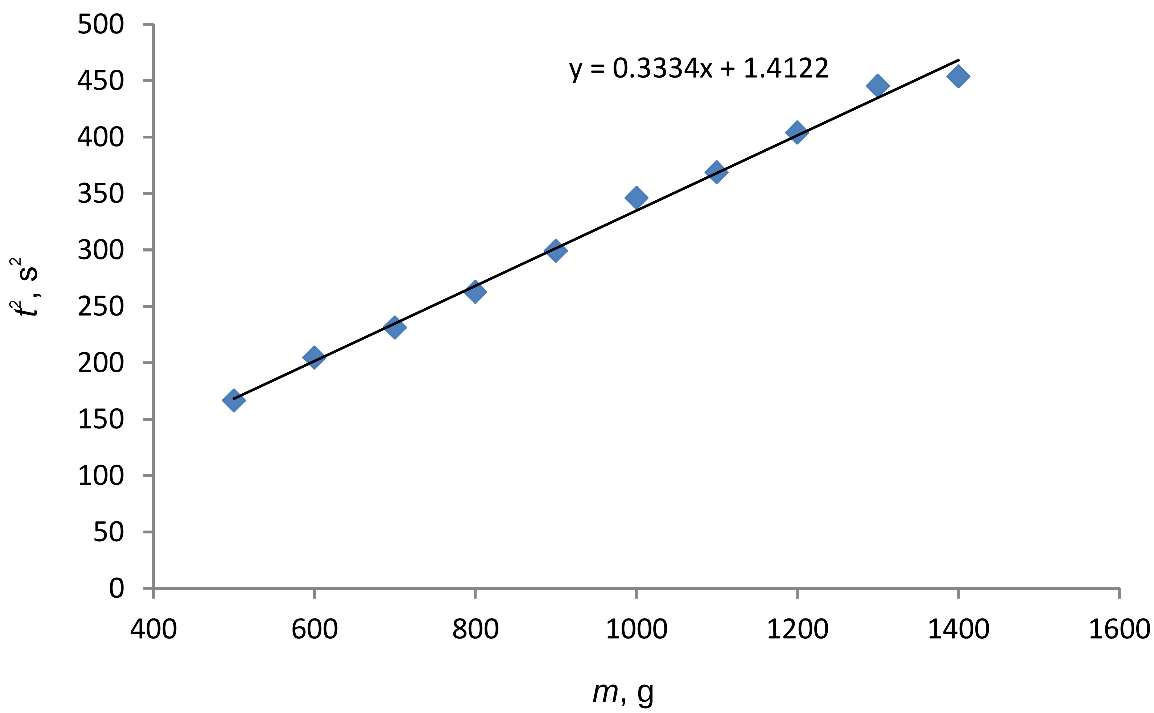
Llamando $\tau = t^2$ obtenemos

$$\tau = \frac{(40\pi)^2}{k} m.$$

Donde ahora claramente la constante de proporcionalidad (pendiente) es

$$b = \frac{(40\pi)^2}{k}. \tag{7}$$

Graficamos t^2 vs *m*.



Con ayuda de la calculadora científica usa do la regresión lineal obtenemos la parte constante *b* = 0,334. Despejamos *k* de (7).

$$k = \frac{(40\pi)^2}{b} \approx 47231 \frac{\text{din}}{\text{cm}} = \boxed{47,2 \frac{\text{N}}{\text{m}}}.$$

2.3 Usando la linealización de la masa

Acomodamos la expresión (4) de tal manera que se nota de la forma $y = a + bx$ que es una proporción lineal,

$$t = \frac{40\pi}{\sqrt{k}}\sqrt{m}$$

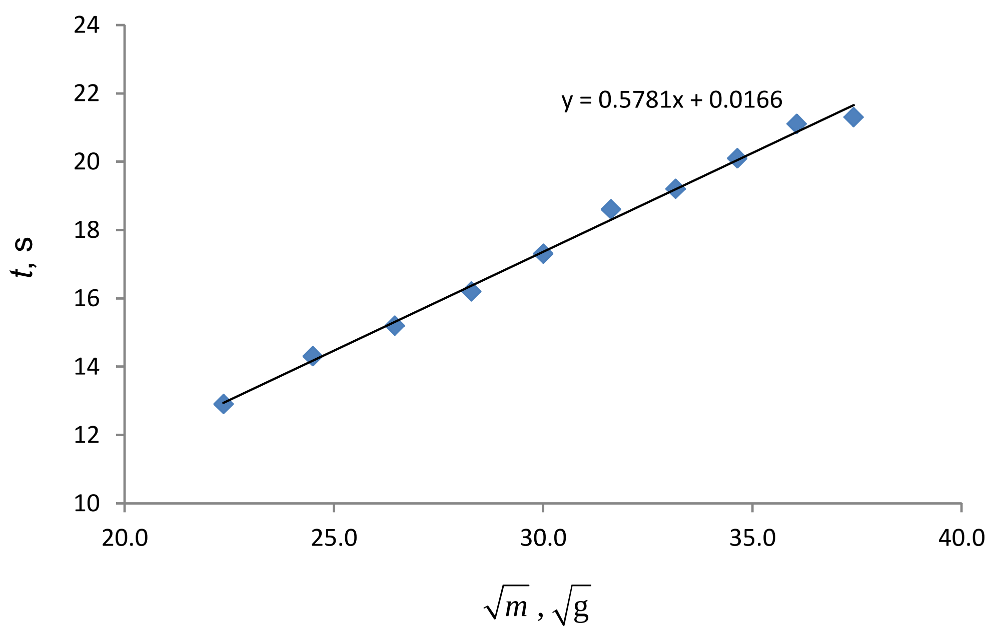
Llamando $\mu = \sqrt{m}$ obtenemos

$$t = \frac{40\pi}{\sqrt{k}}\mu$$

Donde ahora claramente la constante de proporcionalidad (pendiente) es

$$b = \frac{40\pi}{\sqrt{k}} \qquad (8)$$

Graficamos *t* vs $\sqrt{m}$.



Con ayuda de la calculadora científica usando la regresión lineal obtenemos la parte constante *b* = 0,579. Despejamos *k* de (8).

$$k = \left(\frac{40\pi}{b}\right)^2 \approx 47056\,\frac{\text{din}}{\text{cm}} = \boxed{47{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}.$$

3.0 Usando papel logarítmico

Con el uso del papel milimetrado se obtienen resultados rápidos y con el mínimo de computos, es una solución gráfica.

Como se mencionó la ecuación (4) es tipo potencial.

$$y = Ax^B.$$

Si aplicamos logaritmos obtenemos

$$\log y = \log A + B \log x \tag{9}$$

Reemplazando

$$Y = \log y; \quad C = \log A; \quad X = \log x.$$

Resulta ser la ecuación de la recta

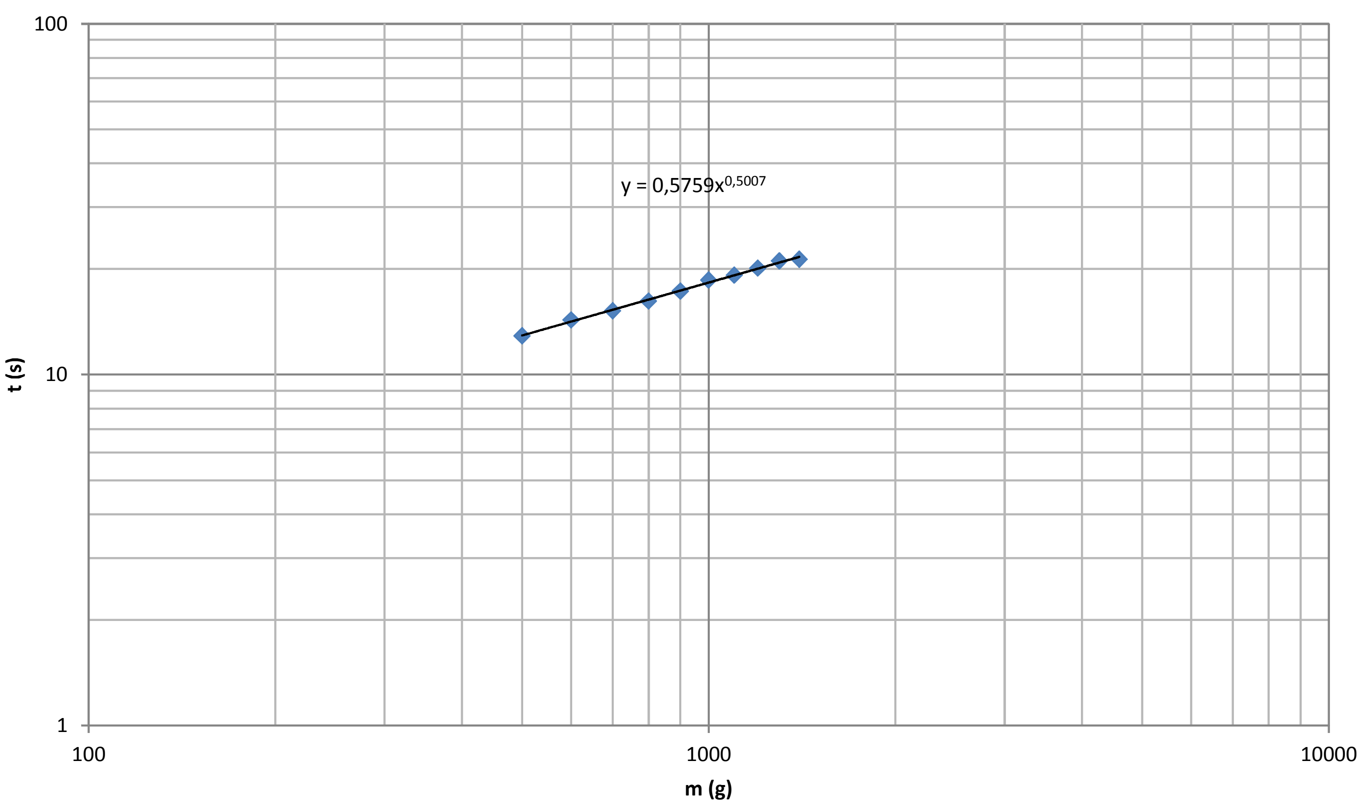
$$Y = C + BX.$$

Ahora comparamos lo expuesto con la logaritmización de (4)

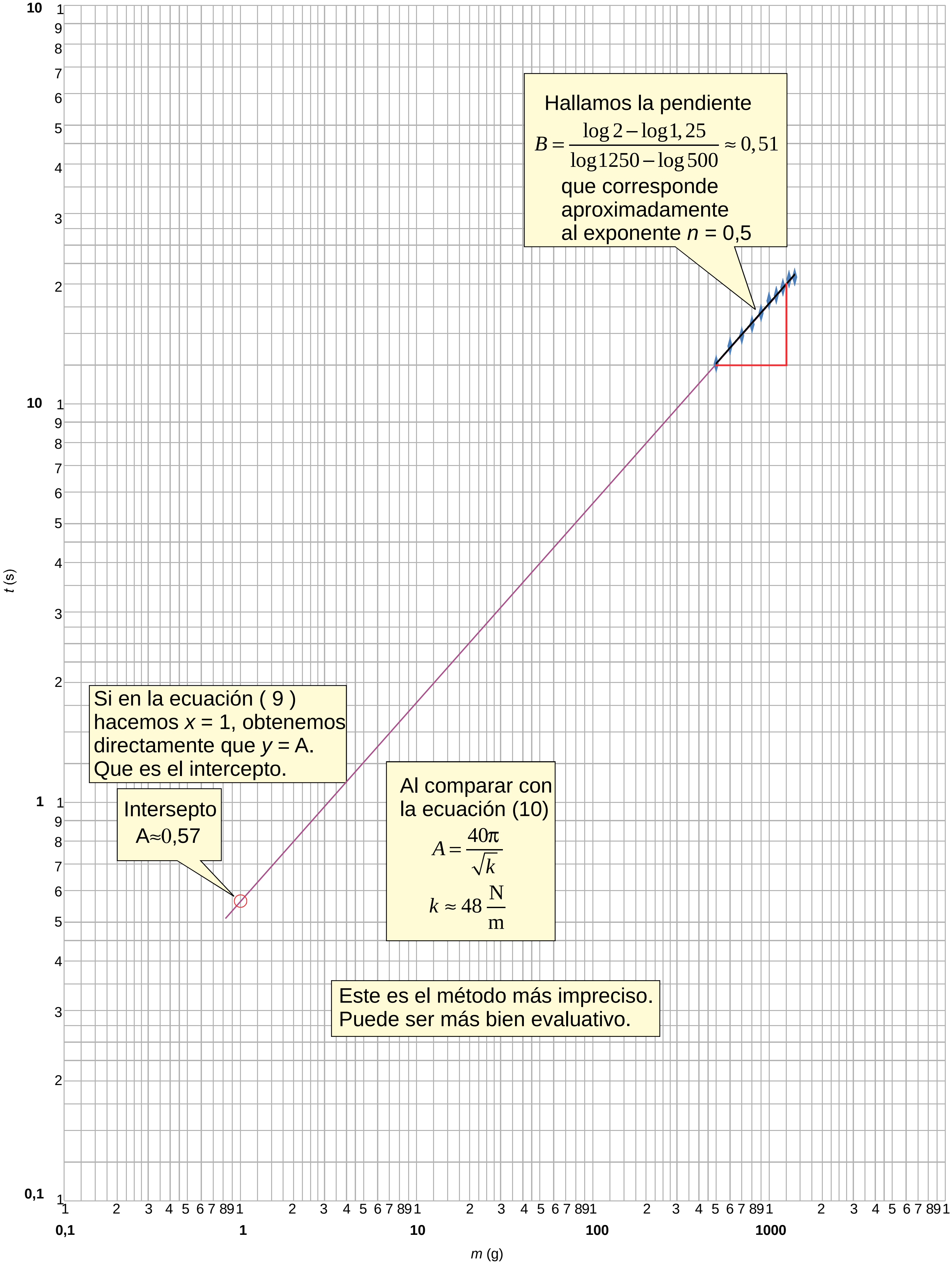
$$\log t = \log \frac{40\pi}{\sqrt{k}} + n \cdot \log m \tag{10}$$

Se puede graficar log y vs log x y analizar la gráfica como en los casos anteriores de linealización. Si en lugar de esto utilizamos directamente el papel logarítmico, el papel linealiza por nosotros.

A continuación tenemos la gráfica hecha en computador.



En la siguiente página se muestra la gráfica que se debe obtener manualmente en el papel logarítmico. Se muestra el análisis gráfico y los resultados.



Hallamos la pendiente
$B = \dfrac{\log 2 - \log 1,25}{\log 1250 - \log 500} \approx 0,51$
que corresponde
aproximadamente
al exponente n = 0,5
Si en la ecuación (9)
hacemos x = 1, obtenemos
directamente que y = A.
Que es el intercepto.
Intersepto
A≈0,57
Al comparar con
la ecuación (10)
$A = \dfrac{40\pi}{\sqrt{k}}$
$k \approx 48\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}}$
Este es el método más impreciso.
Puede ser más bien evaluativo.
t (s)
m (g)