

## Explicación, demostración y evaluación de un nuevo método para hallar el equilibrio térmico entre $n$ cuerpos con cambios de fase

Jorge Guillermo Yory, Gustavo Antonio Mejía

Facultad de Ciencias. Pontificia Universidad Javeriana.  
Cra. 7 N° 43-82. Bogotá. Colombia.  
[guillermo.yory@hotmail.com](mailto:guillermo.yory@hotmail.com), [amejia@javeriana.edu.co](mailto:amejia@javeriana.edu.co)

Recibido: 28-01-2008; Aceptado: 29-01-2009

### Resumen

Se usa un método especial para resolver los problemas calorimétricos donde se busca el estado final de equilibrio y toman lugar cambios de fase. Este método hace uso de la gráfica Temperatura vs. Calor para el calentamiento homogéneo del sistema de cuerpos dado.

**Palabras clave:** estado inicial, estado base, gráfica T vs. Q, estado final.

### Abstract

**Introducing a new method to find the equilibrium state in a process of thermal exchange among  $n$  bodies when phase changes occur.** A special method is used to solve calorimetric problems where the final equilibrium state is sought and phase changes take place. This method makes use of the graph Temperature vs. Heat for the homogeneous heating of a given system of bodies.

**Key words:** initial state, base state, graph T vs. Q, final state.

### Resumo

**Explicação, demonstração e avaliação de um novo método para achar o equilíbrio térmico entre  $n$  corpos com câmbios de fase.** É usado um método especial para resolver os problemas calorimétricos onde se procura o estado final de equilíbrio e tomam lugar os câmbios de fase. Este método faz uso da gráfica Temperatura vs. calor para aquecimento homogêneo do sistema de corpos dado.

**Palavras chave:** estado inicial, estado base, gráfico T vs. Q, estado final

### INTRODUCCIÓN

El problema de encontrar el estado de equilibrio térmico cuando se reúne un número arbitrario de cuerpos, sabiendo que toman lugar cambios de fase de algunos de ellos, es un tema que forma parte de la asignatura de Fluidos y Termodinámica para las carreras de ingeniería. La fenomenología sobre los cambios de fase en transformaciones isobáricas es explicada en los textos de física general, pero no se brinda un método eficiente para hallar el estado final del sistema. La naturaleza del comportamiento por intervalos del proceso no deja otra opción, en el caso general, que apelar al llamado "método" de ensayo y error, como se reconoce en el libro de Sears et al., 2004. Llegar a conclusiones usando ese pro-

ceso es en muchos casos bastante insatisfactorio. Lo que se hace es plantear la ecuación de balance de energía en base a una suposición sobre el intervalo apropiado y, si el despeje no entrega un valor en ese intervalo, entonces queda descartado. Se prosigue de esa manera, hasta encontrar una respuesta coherente, y de especial dificultad es el caso en el que la temperatura final coincide con una de las de cambio de fase de una de las sustancias involucradas.

Lo anterior se verificó indagando a los profesores y a los estudiantes de la asignatura de Fluidos y Termodinámica de la Pontificia Universidad Javeriana y adicionalmente consultando los textos de: Savéliev, 1984; Roller y Blum,

1986, Alonso y Finn, 1995, Resnick y Halliday, 2002 y Sears et al., 2005.

En este artículo se explica un nuevo método para resolver este tipo de problemas, de la manera más sencilla para que pueda ser utilizado por los estudiantes. Este método se remonta a uno anterior (Yory y Mejía, 2003) para dos cuerpos, que se aplicó a estudiantes en una propuesta de mejoramiento docente financiado por la Vicerrectoría Académica de la Universidad Javeriana en el año 2005, donde se utilizaba el computador como herramienta. Pero la dificultad se presentaba cuando se tenía que generalizar a N cuerpos, con lo cual surge la necesidad de otra opción.

En este método, se explora cómo, haciendo uso de la gráfica Temperatura vs. Calor, es posible implementar un procedimiento plenamente predeterminado, que lleva invariablemente a la respuesta correcta. Se trata de una secuencia concreta de consideraciones térmicas sobre el sistema dado, que no requiere más "Física" de la que figura en los libros de la materia.

La siguiente es una frase de una destacada figura de la historia de la física, la invocamos como criterio para que el lector, después de estudiar el artículo juzgue sobre la conveniencia de aplicar este método.

*Strange as it may sound, the power of mathematics rests on its evasion of all unnecessary thought and on its wonderful saving of mental operations.*

Ernst Mach

*Puede sonar extraño, pero el poder de las matemáticas yace en su evasión de todo pensamiento innecesario y en su maravilloso ahorro de operaciones mentales.*

### CAMPO DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

El método que se presentará es aplicable a los procesos de intercambio de calor a presión constante. Esa es justamente, aunque no se enuncie explícitamente en los problemas propuestos, la condición de las situaciones que se plantean en el capítulo sobre calor y cambios de fase de los libros de física general. Como primera aproximación a este fenómeno, tomaremos constantes los calores específicos isobáricos de una sustancia, aunque puedan tomar diferentes valores en su estado sólido, líquido o gaseoso. Sin embargo, esta condición no es necesaria pero se utiliza por razones de simplicidad.

### FENÓMENOS BÁSICOS

Si se calienta un cuerpo a presión constante, se dice que se le suministra calor. El término calor, tiene diferentes inter-

pretaciones (John J., 2008), pero lo concreto es que debe entenderse que se refiere a: un proceso y a la cantidad de energía transferida. Con lo cual, el calor no es una función de estado. La temperatura se eleva según la ley

$Q = mc(T - T_0)$  donde:

$Q =$  cantidad de calor que recibe

$m =$  masa del cuerpo

$c =$  calor específico a presión constante

$T_0 =$  temperatura inicial

$T =$  temperatura final

Si se enfría se usa  $Q < 0$  en la fórmula y resulta  $T < T_0$ .

Supongamos que el cuerpo parte de una temperatura  $T_0 = 0$  K (esta suposición no es necesaria, se escoge por simplicidad) y lo calentamos continuamente de una manera cuasiestática, para que su temperatura sea homogénea en su interior y se eleve en el transcurso del tiempo. Debemos entonces poner  $c_{\text{sólido}}$  en la ecuación, que abreviaremos  $c_s$ :

$$Q = mc_s T \quad (1)$$

Esta relación define la temperatura que ha alcanzado el cuerpo en función de la cantidad de calor absorbido y puede representarse en una gráfica, que resultaría ser una recta que parte del origen, por ser una función lineal. La ecuación y su gráfica son válidas hasta que se llega a la temperatura de fusión  $T_f$ . Allí T se mantiene constante mientras la sustancia transforma su estado de sólido a líquido. Esto está regido por la ley

$Q = m_l L_f$  donde:

$Q =$  calor adicional absorbido por el cuerpo totalmente sólido a partir de  $T = T_f$

$m_l =$  masa que ha pasado al estado líquido

$L_f =$  calor latente de fusión

Aquí la variable que depende de  $Q$  es la cantidad de masa  $m_l$  que está líquida. Esa variable va recorriendo el intervalo  $0 < m_l < m$ .

Cuando  $m_l = m$ , toda la sustancia del cuerpo se encuentra en estado líquido, aún a  $T = T_f$ .

Si la sustancia continúa recibiendo calor, vuelven a repetirse los procesos anteriores, a saber, el líquido se calienta a un ritmo determinado por  $c_{\text{líquido}}$  ( $c_l$ ). La temperatura se

detiene en  $T=T_v$ , que es la temperatura de ebullición o vaporización característica de esa sustancia. Allí se transforma de líquido en gas, controlado por el calor latente de vaporización  $L_v$ . Va apareciendo una cantidad  $m_g$  de gas, hasta que  $m_g=m$ , que es cuando toda la sustancia está gaseosa; el líquido ha desaparecido, pero suponemos que el gas ha sido recogido. Calentamiento ulterior hará subir su temperatura a un ritmo determinado por  $c_{gas}$  ( $c_g$ ).

Todo el proceso descrito queda adecuadamente representado con la gráfica de la Figura 1, (tener en cuenta que, según Riveros H. G. 2008, esta gráfica es teórica, su comprobación experimental tiene muchas dificultades técnicas).

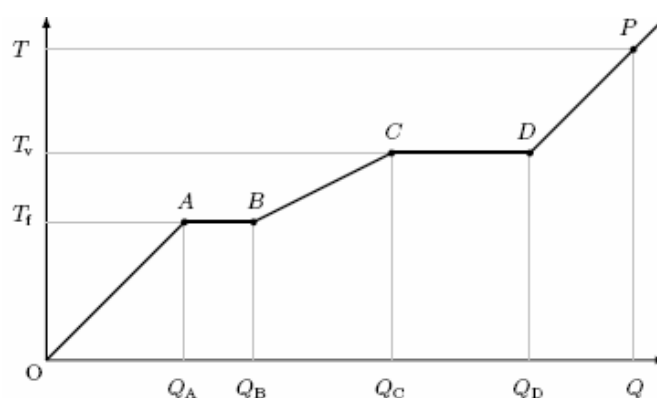
El punto P, de coordenadas  $(Q, T)$ , representa el estado del cuerpo. Parte del origen y va recorriendo los segmentos de la curva poligonal, ascendiendo o moviéndose hacia la

derecha por las llanuras de  $T$  constante. Después de la vaporización llega a la zona de gas, como se ilustra con la posición mostrada en la figura. Detalle por ejemplo la llanura AB. En A todo el cuerpo está sólido y no hay líquido. En B toda la sustancia está líquida y ya no queda sólido. En un punto entre A y B hay una mezcla de sólido y líquido. La fracción recorrida de la longitud de la llanura corresponde a la fracción del cuerpo que ha fundido.

Es decir, si P está entre A y B se tiene que

$$\frac{Q_{AP}}{Q_{AB}} = \frac{m_l}{m}$$

donde  $m_l$  es la masa de líquido que ha aparecido,  $m$  es la masa total del cuerpo original y por supuesto,  $m-m_l$  sería la masa que queda aún en estado sólido en ese momento. Algo semejante ocurre para la llanura CD.



Proceso	Relación entre Variables	Rango de validez	Calor total en el intervalo	Coordenada Q final
OA: calentamiento en estado sólido	$Q = mc_s T$	$0 \leq Q \leq Q_A$ $0 \leq T \leq T_f$	$Q_{OA} = mc_s T_f$	$Q_A = Q_{OA}$
AB: transformación de sólido a líquido	$Q - Q_A = m L_f$	$Q_A \leq Q \leq Q_B$ $T = T_f$ $0 \leq m_l \leq m$	$Q_{AB} = m L_f$	$Q_B = Q_A + Q_{AB}$
BC: calentamiento en estado líquido	$Q - Q_B = mc_l (T - T_f)$	$Q_B \leq Q \leq Q_C$ $T_f \leq T \leq T_v$	$Q_{BC} = mc_l (T_v - T_f)$	$Q_C = Q_B + Q_{BC}$
CD: transformación de líquido a gas	$Q - Q_C = m_g L_v$	$Q_C \leq Q \leq Q_D$ $T = T_v$ $0 \leq m_g \leq m$	$Q_{CD} = m L_v$	$Q_D = Q_C + Q_{CD}$
DP: calentamiento en estado gaseoso	$Q - Q_D = mc_g (T - T_v)$	$Q_D \leq Q$ $T_v \leq T$	$Q_{DP} = mc_g (T - T_v)$	$Q = Q_D + Q_{DP}$

**Figura 1.** Curva de Temperatura vs. Calor

**Tabla 1. Constantes térmicas para el agua**

$c_s$	$T_f$	$L_f$	$c_\ell$	$T_v$	$L_v$	$c_g$
2093 $\frac{J}{kg K}$	273 K	$3.35 \times 10^5 \frac{J}{kg}$	4186 $\frac{J}{kg K}$	373 K	$2.26 \times 10^6 \frac{J}{kg}$	2093 $\frac{J}{kg K}$
0.5 $\frac{cal}{g^\circ C}$	0 °C	80 $\frac{cal}{g}$	1 $\frac{cal}{g^\circ C}$	100 °C	540 $\frac{cal}{g}$	0.5 $\frac{cal}{g^\circ C}$

Siete constantes son las que caracterizan el comportamiento térmico de la sustancia. Para el agua, que es la referencia en calorimetría, los valores aproximados de esas constantes se dan en la tabla 1.

**LA GRÁFICA T VS. Q PARA UN SISTEMA DE VARIOS CUERPOS**

Consideremos un sistema formado por dos cuerpos de diferentes sustancias. Partiendo de  $T=0$  K vamos a imaginar calentarlo cuasiestáticamente para que haya en todo momento una temperatura uniforme en el sistema. Vamos a trazar la gráfica de Temperatura versus Calor Total Absorbido. Los cuerpos tienen masas  $m_1$  y  $m_2$ . Cada una de las dos sustancias debe ser caracterizada por las 7 constantes de la anterior tabla, las cuales deben ahora ser indexadas 1 ó 2. Las temperaturas de fusión y ebullición  $T_{f1}$ ,  $T_{f2}$ ,  $T_{v1}$ ,  $T_{v2}$

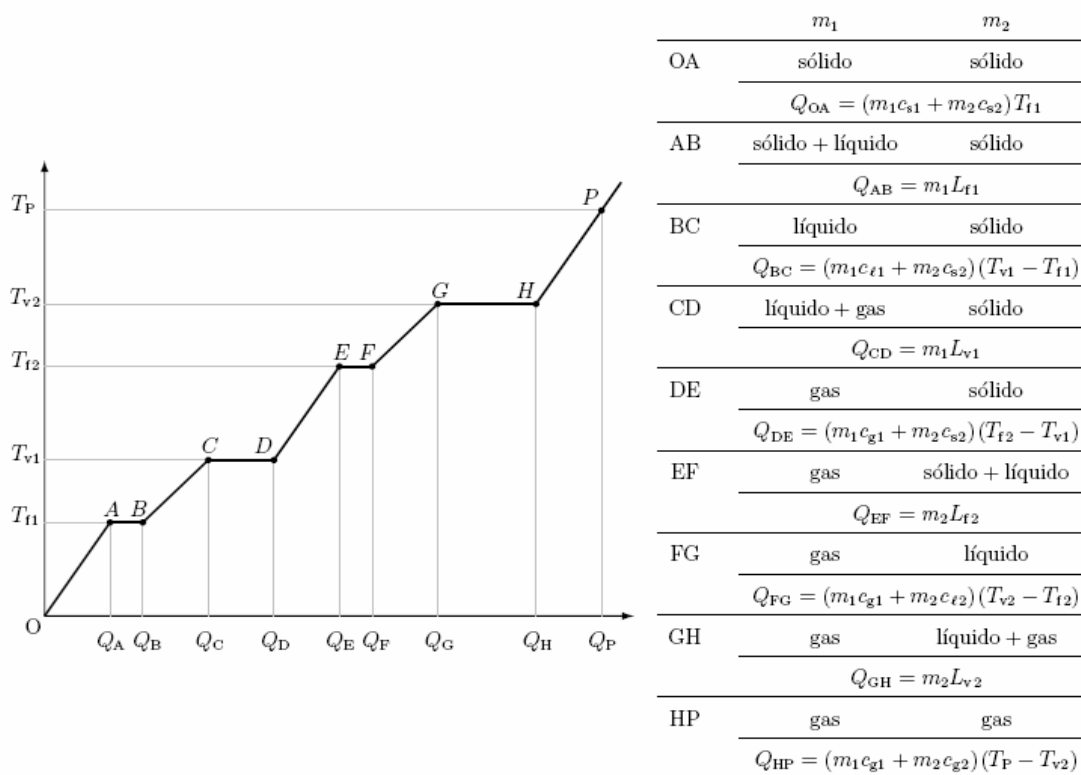
pueden tener diferentes relaciones de orden entre sí. Se tomará un orden específico para trazar la gráfica, pero los argumentos pueden ser adaptados fácilmente a otros casos. Supongamos pues que

$$T_{f1} < T_{v1} < T_{f2} < T_{v2}$$

Esto puede corresponder al caso en que la sustancia 1 es agua y la 2 un metal.

La gráfica de la Figura 2 muestra el resultado. Muestra los calores en cada una de las etapas del proceso. Las coordenadas Q de los puntos notables se calculan por acumulación:

$$Q_B = Q_A + Q_{AB}; Q_C = Q_B + Q_{BC}; Q_D = Q_C + Q_{CD}; \text{ etc.}$$



**Figura 2.** Curva de Temperatura vs. Calor para varios cuerpos.

La curva poligonal parte como una recta desde el origen. Esto es debido a que para llegar a un punto con  $T < T_{f1}$  se requiere un calor

$$Q = Q_1 + Q_2 = m_1 c_{s1} T + m_2 c_{s2} T = (m_1 c_{s1} + m_2 c_{s2}) T \quad (2)$$

Ahora bien, el promedio ponderado de los calores específicos de los dos cuerpos sólidos es

$$\bar{c}_{ss} = \frac{m_1 c_{s1} + m_2 c_{s2}}{m_1 + m_2}. \text{ Pero } m = m_1 + m_2 \text{ es la masa total del sistema, de modo que la ecuación 2 se puede escribir:}$$

$$Q = m \bar{c}_{ss} T$$

donde el subíndice ss significa que tanto el cuerpo 1 como el 2 están en estado sólido. Esta es la interpretación de la recta OA de la gráfica: el sistema se comporta como si estuviera hecho de una sola sustancia con calor específico  $\bar{c}_{ss}$ .

La temperatura sube según la ecuación (2) hasta que se llega a  $T_{f1}$ , que es la temperatura de fusión de la sustancia 1. Subsecuente calor agregado al sistema hará fundir esa sustancia. Al cuerpo 2 no le ocurre nada, ya que su punto de fusión es más alto. Esto es así sin importar si la inyección de calor proveniente del exterior es aplicada sobre el cuerpo 1 ó el 2. La temperatura del sistema no sube hasta que toda la sustancia 1 funda. Por eso la llanura AB tiene una extensión  $Q_{AB} = m_1 L_{f1}$ .

En el punto B toda la sustancia 1 está líquida, mientras la 2 está sólida. En esos estados ocurrirá el calentamiento subsecuente. El calor necesario para subir la temperatura hasta un valor T en el intervalo  $T_{f1} \leq T \leq T_{v1}$  vale

$$Q - Q_B = Q_1 + Q_2 = m_1 c_{l1} (T - T_{f1}) + m_2 c_{s2} (T - T_{f1}) =$$

$$(m_1 c_{l1} + m_2 c_{s2}) (T - T_{f1})$$

Por eso la gráfica es una recta, con pendiente que podríamos escribir  $Q = m \bar{c}_{ls} (T - T_{f1})$ .

El proceso continúa de esa manera, de forma que van apareciendo las combinaciones de sólido, líquido y gas que se especifican en la tabla de la Figura 2. Después del punto H ambas sustancias quedan en estado gaseoso.

Para un sistema con tres o más sustancias, los argumentos anteriores se generalizan fácilmente. Cada nueva sustancia presente en el sistema agrega dos llanuras a la gráfica.

Están asociadas a sus transformaciones sólido-líquido y líquido-gas y quedan insertadas a las alturas correspondientes a sus  $T_f$  y  $T_v$ . También influye en las pendientes de las cuestas, generando un término adicional  $mc$ .

## DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Definamos exactamente el tipo de problema que se pretende resolver. Consiste en la situación en la que se ponen en contacto térmico N cuerpos. Se dan sus masas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , así como sus temperaturas iniciales  $T_{10}, T_{20}, \dots, T_{N0}$ . Además se especifica el material o sustancia de que está hecho cada uno de ellos. La incógnita es la temperatura final del sistema. También se requiere hallar, en caso de que esa temperatura coincida con la de un cambio de fase de alguno de los cuerpos, la cantidad de masa de ese cuerpo que queda en cada uno de los dos estados. El sistema formado por los N cuerpos está aislado térmicamente de su entorno (pared adiabática que bloquea el flujo de calor hacia o desde el exterior). Se asume que los procesos a que se ve sometido cada cuerpo son isobáricos, es decir, a presión constante, usualmente la atmosférica.

Comencemos por reparar en el hecho de que las condiciones de aislamiento térmico y presión constante pueden ser incompatibles. Ciertamente la presión actuando sobre la cara externa de la frontera del sistema es constante e igual a la atmosférica. Pero lo que determina el proceso para los cuerpos del sistema es la presión interna. El calor específico que se maneja en la ecuación (1) es el isobárico: debería escribirse  $c_p$ . Pero si la pared del sistema estuviera sellada, las expansiones o contracciones en diferentes grados de los cuerpos podrían alterar la presión interna. Se necesita por tanto que haya un canal hacia el exterior que mantenga la presión atmosférica dentro del sistema. Pero entonces no puede estar el sistema aislado térmicamente. ¿Cómo reconciliar las dos exigencias? Pensemos en una situación experimental concreta típica. A un calorímetro hecho de cierto material se le introduce agua y algunos cuerpos (hielo sobre-enfriado, bloques sólidos, otros líquidos, vapores, etc.) a diferentes temperaturas. Se le coloca la tapa y se espera a que se establezca el equilibrio térmico. La situación aproxima los requerimientos teóricos si el calorímetro está bien aislado térmicamente y la tapa cierra bien, pero no herméticamente. Entonces habrá poco flujo de calor, ya que los resquicios son conductos de muy pequeña área transversal a través de una sustancia poco conductora como es el aire, lo que hace que corriente calorífica sea exigua. Sin embargo, cumplen con el propósito de comunicar con el exterior y mantener la presión atmosférica en el interior. Podemos decir entonces que el sistema formado por los N cuerpos está aislado térmica mas no mecánicamente del exterior.

Pasemos a la solución teórica del problema. Para cada cuerpo, deberíamos en el caso más general consultar los valores tabulados de las 7 constantes térmicas:

$c_{sol}$ ,  $c_{liq}$ ,  $c_{gas}$ ,  $T_f$ ,  $T_v$ ,  $L_f$  y  $L_v$ . Toda esa información podríamos consignarla en una tabla de 7 columnas con  $N$  filas, para un total de  $7N$  datos adicionales a las  $N$  masas y  $N$  temperaturas iniciales. El total de datos del problema es  $9N$ . Claro que el número de sustancias diferentes puede ser menor, como en el caso en que hielo, agua y vapor de agua son tres de los cuerpos del sistema. Los renglones de la tabla de constantes pueden referirse entonces no a los cuerpos sino a las sustancias presentes.

No existe fórmula matemática universal que describa el resultado. Se presentan muchos casos diferentes, según los cambios de fase que experimenten los cuerpos del sistema. Lo que desarrollaremos será un método, es decir, una se-

cuencia de pasos bien predeterminada que va haciendo uso de los datos del problema, hasta llegar a la respuesta. En esta sección se busca generar una perspectiva general del método que defina los pasos a seguir. Puede parecer implicar una secuencia larga de cálculos, pero que si se aplica con claridad y correctamente a los problemas normales del texto de física, éstos son resueltos con facilidad y prontitud, sin lugar a bloques de trabajo perdido, esfuerzos mentales innecesarios o incertidumbre sobre las conclusiones.

Estos son los pasos del método:

### 1. Selección del estado base

La Figura 3 representa un sistema de los que nos ocupa. Calorímetro con agua y dos bloques ( $N=4$  cuerpos). Se dibujó tres veces para indicar los diferentes estados que

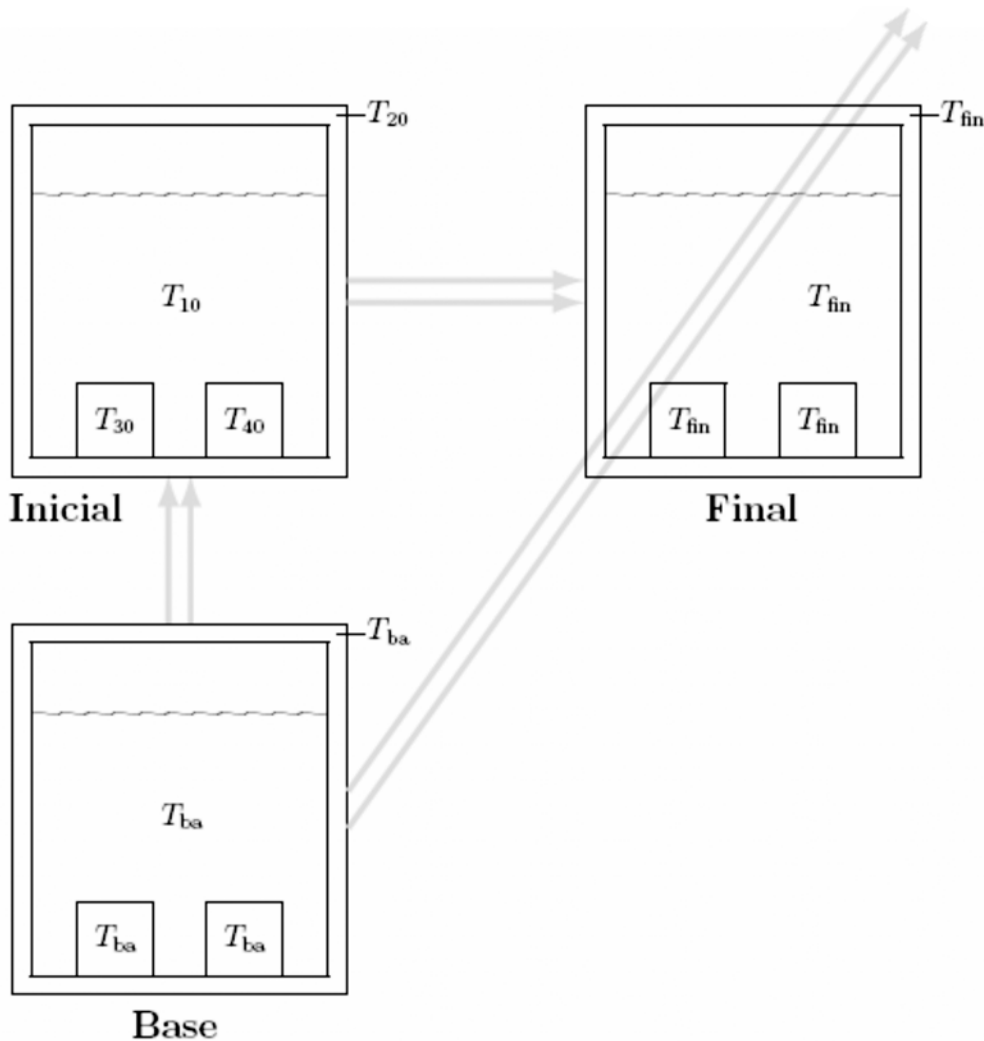


Figura 3: Representación de los estados, inicial, base y final.

manejaremos. El dibujo de arriba a la izquierda muestra el *estado inicial* del sistema, con las temperaturas de partida de cada cuerpo. El de arriba a la derecha es el *estado final* que buscamos, cuando todo ha quedado en equilibrio térmico a una temperatura  $T_{final}$ . La doble flecha simboliza el proceso por el que pasa el sistema para cambiar del estado inicial al final.

El método comienza identificando las temperaturas máxima y mínima del sistema en su estado inicial. Se sabe que la temperatura final debe estar dentro de ese intervalo. Esto tiene que ser así o se violaría la ley de conservación de la energía. Por ejemplo, suponga que la temperatura final fuera mayor que la máxima de las iniciales del sistema. En ese caso todos los cuerpos tendrían que haber absorbido calor. Pero el requisito fundamental que deben cumplir los  $N$  calores  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  que "absorben" los cuerpos hasta que se establece el estado de equilibrio térmico final es que

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N = 0 \quad (3)$$

Esta condición exige que haya algunos positivos y otros negativos.

Ahora imaginaremos que todo el sistema estuviera a la temperatura mínima. A ese lo vamos a llamar el *estado base* (estado B). Es un estado de equilibrio térmico: la temperatura es homogénea en todo el sistema y la vamos a denominar  $T_{base}$ . En caso de que esa temperatura sea la de un cambio de fase de una de las sustancias del sistema, puede ocurrir que el estado inicial contenga esa sustancia en las dos fases (por ejemplo: 100 g de hielo y 200 g de agua a 0°C). Por simplicidad conceptual, tomaremos el estado base suponiendo que toda esa sustancia está en el punto extremo izquierdo de su llanura de transformación de estado (300 g de hielo a 0°C).

## 2. Trazado de la Gráfica temperatura vs. Calor

Partiendo del estado base, se imagina calentar cuasiestáticamente el sistema. Su temperatura será homogénea en todo momento (constante en el espacio), pero cambiante en el tiempo. Se realizan las gráficas  $T$  vs.  $Q$ . No es necesario extender esa gráfica más allá de la temperatura máxima del sistema en su estado inicial (la más alta de todos los cuerpos dados en el enunciado del problema). En notación matemática queda expresado así:

$$T_{\min} = \min\{T_{10}, T_{20}, \dots, T_{N0}\} \text{ y } T_{\max} = \max\{T_{10}, T_{20}, \dots, T_{N0}\}$$

Rango de la gráfica:  $T_{\min} \leq T \leq T_{\max}$ .

El proceso de calentar homogéneamente el sistema a partir del estado base ha sido representado con la doble línea de

la Figura 3. En ese dibujo la doble línea pasa de largo el estado final, porque aún no sabemos cuál sea y por eso la gráfica se lleva hasta  $T=T_{\max}$ .

## 3. Localización del punto de la gráfica que corresponde al estado final

La gráfica trazada en el paso 2 representa todos los posibles estados de equilibrio térmico del sistema que pueden ser el estado final buscado en el problema. El problema queda resuelto cuando determinemos la coordenada  $Q$  de ese estado final. Este número o constante se calculará del siguiente modo. Regresemos al estado base. Calculemos cuánto calor se necesita para llevar al sistema desde ese estado base hasta el estado inicial dado en el enunciado del problema, *con calentamientos por separado de cada cuerpo*.

Esto quiere decir: tomamos cada uno de los  $N$  cuerpos y calculamos el calor requerido para llevarlo del estado base al estado inicial del problema, así:

$$Q'_1 = \text{calor para llevar a } m_1 \text{ desde } T_{ba} \text{ hasta } T_{10}$$

$$Q'_2 = \text{calor para llevar a } m_2 \text{ desde } T_{ba} \text{ hasta } T_{20}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$Q'_N = \text{calor para llevar a } m_N \text{ desde } T_{ba} \text{ hasta } T_{N0}$$

$$\sum_{i=1}^N Q'_i = Q'_{total} \quad (4)$$

Estos calores no son los mismos que los de la ecuación (3), por eso los primamos. Allá se trata de los calores absorbidos por cada cuerpo en el proceso espontáneo de intercambio térmico para alcanzar el equilibrio. Aquí estamos considerando el proceso hipotético de llevar el sistema desde el estado base hasta el estado inicial. Todos los  $Q'$  son positivos. Algunos de ellos pueden contener varios términos, correspondientes a calentamientos y cambios de fase.

Ahora ubique en la gráfica  $T$  vs.  $Q$  el punto con coordenada  $X=Q'_{total}$ . Ese es el punto que representa el estado final de equilibrio térmico buscado. Se puede determinar fácilmente su coordenada  $Y$ ; esa será la temperatura final del sistema.

Si la temperatura final coincide con la de un cambio de estado de alguna de las sustancias presentes, se puede igualmente fácil calcular la cantidad de esa sustancia que ha cambiado de fase. Para ello se aplica una ecuación fraccional o directamente por calor latente.

La ecuación normal de balance energético (3), se puede usar ya para terminar como un chequeo de que el estado de equilibrio encontrado es el correcto.

**Ejemplo resuelto**

Ilustraremos paso a paso como se implementa el método, usándolo para resolver el siguiente problema tomado del libro de Tipler, P. A., 1992:

Un calorímetro de aluminio de 200 g contiene 500 g de agua a 20°C. Dentro del recipiente se introduce un trozo de hielo de 100 g enfriado a -20°C.

- a) Determinar el estado final del sistema.
- b) Se añade un segundo trozo de hielo de 200 g a -20°C. Hallar el estado final del sistema.

Agua:

$$c_{sólido} = 0,5 \frac{cal}{g^{\circ}C}$$

$$L_{fusión} = 80 \frac{cal}{g}$$

$$c_{líquido} = 1 \frac{cal}{g^{\circ}C}$$

Aluminio:  $c_{sólido} = 0,215 \frac{cal}{g^{\circ}C}$

**Solución Parte a:**

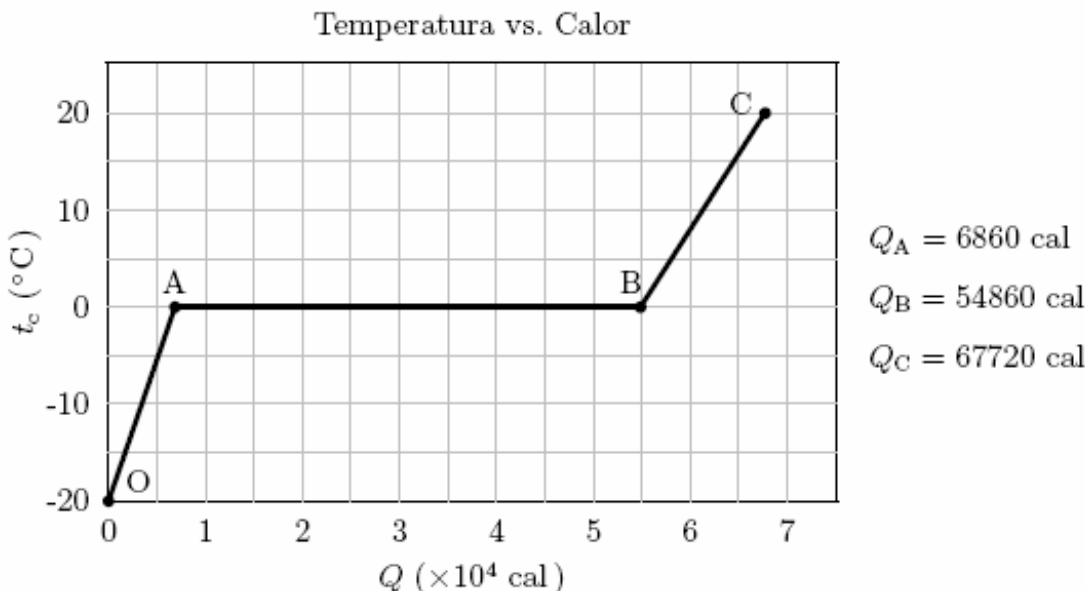
Paso 1. Selección del estado base

Este sistema tiene tres cuerpos:  $N=3$ , pero sólo dos sustancias diferentes: aluminio y agua. Vemos que la temperatura máxima es 20°C. La mínima es -20°C. En el intervalo  $-20^{\circ}C \leq t_c \leq 20^{\circ}C$  el aluminio es sólido; su punto de fusión es mucho más alto. Por eso basta con el dato suministrado  $c_{sol}$ . En cambio el agua presenta transformación de estado dentro de ese intervalo, a saber, fusión a 0°C. Por eso los tres parámetros dados:  $c_{sol}$ ,  $L_f$  y  $c_{liq}$ .

El estado base será entonces aquel en el que todo el sistema se encuentra a -20°C. El sistema queda compuesto por 200 g de aluminio junto con 600 g de agua (que a esa temperatura es hielo).

Paso 2. Trazado de la gráfica Temperatura vs. Calor

Ahora imaginamos que el sistema descrito en el párrafo anterior es calentado cuasiestáticamente. La temperatura uniforme del sistema va subiendo a medida que absorbe calor. La Figura 4 muestra la gráfica a escala de  $t_c$  vs.  $Q$ . Lleva los valores numéricos reales que surgen en este caso. Se realizó en °C para el eje Y, en el intervalo -20°C hasta 20°C y en cal para el eje X.



**Figura 4.** Gráfica t vs. Q para la parte a.



Esos valores se calculan así:

- a) Calor necesario para calentar el sistema desde  $-20^{\circ}\text{C}$  hasta  $0^{\circ}\text{C}$ :

$$Q_A = (600\text{g})(0,5 \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}})(20^{\circ}\text{C}) + (200\text{g})(0,215 \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}})(20^{\circ}\text{C}) = 6860\text{cal}$$

- b) Calor necesario para fundir el agua a  $0^{\circ}\text{C}$ :

$$Q_{AB} = 600\text{g} \times 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 48000\text{cal}$$

$$Q_B = Q_A + Q_{AB} = 54860\text{cal}$$

- c) Calor necesario para calentar el sistema desde  $0^{\circ}\text{C}$  hasta  $20^{\circ}\text{C}$ :

$$Q_{BC} = (600\text{g})(1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}})(20^{\circ}\text{C}) + (200\text{g})(0,215 \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}})(20^{\circ}\text{C}) = 12860\text{cal}$$

$$Q_C = Q_B + Q_{BC} = 67720\text{cal}$$

Paso 3. Localización del punto de la gráfica que corresponde al estado final

Regresamos al estado base. Los tres cuerpos del problema están cada uno a  $-20^{\circ}\text{C}$ . Calcularemos el calor necesario para llevarlos, por separado, desde esa temperatura hasta la que define el enunciado del problema (estado inicial dado).

Aluminio:  $t_{ba} = -20^{\circ}\text{C}$  hasta  $t_0 = 20^{\circ}\text{C}$ :

$$Q'_{\text{Aluminio}} = (200\text{g})(0,215 \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}})(40^{\circ}\text{C}) = 1720\text{cal}$$

Hielo:  $t_{ba} = -20^{\circ}\text{C}$  hasta  $t_0 = -20^{\circ}\text{C}$ :  $Q'_{\text{Hielo}} = 0\text{cal}$

Agua:  $t_{ba} = -20^{\circ}\text{C}$  hasta  $t_0 = 20^{\circ}\text{C}$ :

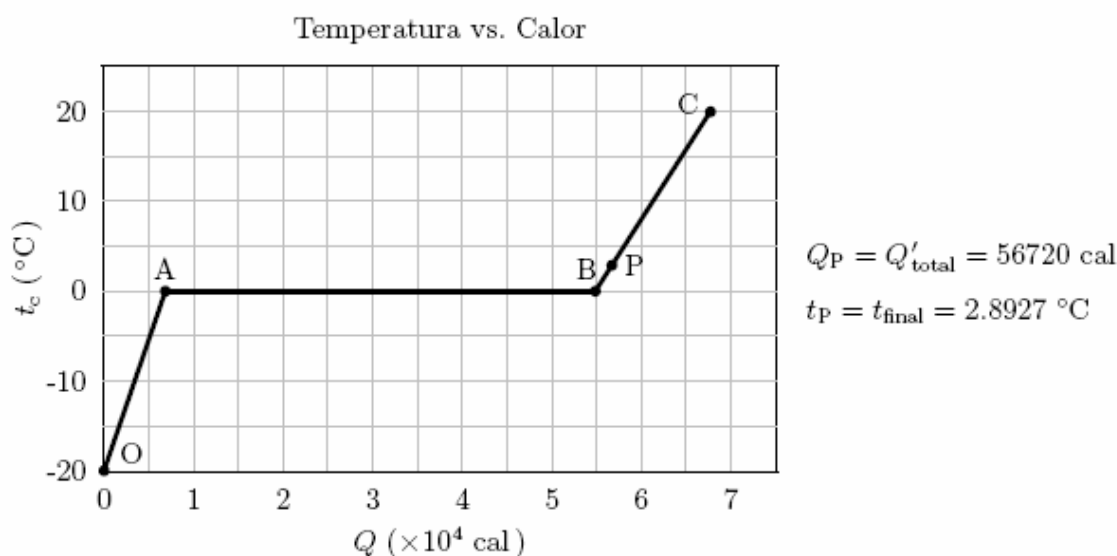
$$Q'_{\text{Agua}} = (500\text{g})(0,5 \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}})(20^{\circ}\text{C}) + (500\text{g})(80 \frac{\text{cal}}{\text{g}}) + (500\text{g})(1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}})(20^{\circ}\text{C}) = 55000\text{cal}$$

Total:

$$Q'_{\text{total}} = Q'_{\text{aluminio}} + Q'_{\text{hielo}} + Q'_{\text{agua}} = 1720\text{cal} + 0\text{cal} + 55000\text{cal} = 56720\text{cal}$$

Ahora ubicamos el punto con esa coordenada X en la gráfica  $T$  vs.  $Q$ . Cae en el intervalo  $Q_B \leq Q'_{\text{total}} \leq Q_C$ . La Figura 5 muestra ese punto, rotulado P. También incluye la coordenada Y de ese punto, que corresponde a la temperatura final del sistema.

Ésta última se puede calcular fácilmente por geometría analítica. La recta BC tiene pendiente



**Figura 5.** Localización del estado final.

$$k = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{t_C - t_B}{Q_C - Q_B} = \frac{20^\circ}{12860 \text{ cal}} = 1,5552 \times 10^{-3} \frac{^\circ\text{C}}{\text{cal}}$$

La ecuación de una recta de pendiente k que pasa por el punto  $(X_0, Y_0)$  es  $Y - Y_0 = k(X - X_0)$ . Si tomamos como punto  $(X_0, Y_0)$  el punto B, entonces  $X_0 = Q_B = 54860 \text{ cal}$ ;  $Y_0 = t_B = 0^\circ\text{C}$ . de modo que la ecuación de la recta BC es  $t = 1,5552 \times 10^{-3} (Q - 54860)$ .

El punto P pertenece a esa recta:

$$t_p = 1,5552 \times 10^{-3} (Q_p - 54860) =$$

$$1,5552 \times 10^{-3} (56720 - 54860) = 2,8927 \text{ }^\circ\text{C}$$

En realidad, algunas de las constantes térmicas dadas aquí con el enunciado del problema no tienen sino 2 cifras significativas. Por esa razón la respuesta, a esa precisión, sería  $t_{\text{final}} \approx 2.9^\circ\text{C}$

Pero usaremos el resultado que tiene 5 cifras significativas, para el propósito de verificar que es la respuesta correcta, concordante con los datos usados.

Paso 4. Comprobación del resultado:

Ahora consideramos el proceso real espontáneo que toma lugar, partiendo del estado inicial dado en el problema, hasta el estado final que hemos encontrado. Si la respuesta es correcta, debe satisfacer la condición de balance energético (3). Vamos asegurarnos de eso. Calculamos el calor absorbido por cada uno de los 3 cuerpos:

Aluminio:  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  hasta  $t_{\text{final}} = 2,8927^\circ\text{C}$ :

$$Q_{\text{Aluminio}} = (200 \text{ g}) \left(0,215 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}\right) (2,8927 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C}) =$$

$$-735,6143 \text{ cal}$$

Agua:  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  hasta  $t_{\text{final}} = 2,8927^\circ\text{C}$ :

$$Q_{\text{Agua}} = (500 \text{ g}) \left(1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}\right) (2,8927 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C}) = -8553,6547 \text{ cal}$$

Hielo:  $t_0 = -20^\circ\text{C}$  hasta  $t_{\text{final}} = 2,8927^\circ\text{C}$ :

$$Q_{\text{Hielo}} = (100 \text{ g}) \left(0,5 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}\right) (20 \text{ }^\circ\text{C}) + (100 \text{ g}) \left(80 \frac{\text{cal}}{\text{g}}\right) +$$

$$(100 \text{ g}) \left(1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}\right) (2,8927 \text{ }^\circ\text{C}) = 9289,2691 \text{ cal}$$

$$Q_{\text{total}} = Q_{\text{aluminio}} + Q_{\text{hielo}} + Q_{\text{agua}} = (-735,6143 - 8553,6547 + 9289,2691) \text{ cal} = 0 \text{ cal}$$

No queda duda de que el estado final del sistema para la parte a) del problema es 200 g de aluminio con 600 g de agua líquida, todo a  $2.8927^\circ\text{C}$ .

Solución Parte b)

No se especifica si el segundo bloque de hielo se introduce al comienzo o al final del proceso de la parte a). Sin embargo, el resultado se espera que sea el mismo. Supongamos que es introducido al comienzo.

El estado inicial del sistema sería:

200 g de aluminio a  $20^\circ\text{C}$

500 g de agua a  $20^\circ\text{C}$

300 g de hielo a  $-20^\circ\text{C}$ .

El estado base del sistema sería:

200 g de aluminio  $-20^\circ\text{C}$

800 g de hielo  $-20^\circ\text{C}$

Se puede ahorrar algo de trabajo si calculamos primero el  $Q'_{\text{total}}$  del paso 3 del método y después trazamos la gráfica de calentamiento del sistema a partir del estado base (paso 2). De esa forma, tan pronto la coordenada X de la gráfica sobrepase el valor de  $Q'_{\text{total}}$  se puede dar por terminada.

Calculemos entonces el calor requerido para llevar el sistema desde el estado base hasta el estado inicial, con calentamientos por separado de cada uno de los 3 cuerpos.

Aluminio: 200g de  $-20^\circ\text{C}$  a  $20^\circ\text{C}$   
 $Q'_{\text{aluminio}} = 1720 \text{ cal}$

Hielo: 300 g de  $-20^\circ\text{C}$  a  $-20^\circ\text{C}$   
 $Q'_{\text{hielo}} = 0 \text{ cal}$

Agua: 500 g de  $-20^\circ\text{C}$  a  $20^\circ\text{C}$   
 $Q'_{\text{agua}} = 55000 \text{ cal}$

Total  $Q'_{\text{total}} = 56720 \text{ cal}$

Este es exactamente el resultado del paso 3 de la parte a) porque todo es igual excepto la cantidad de hielo. Pero el hielo no contribuye nada al calor ya que sus temperaturas base e inicial son ambas de  $-20^\circ\text{C}$ .

La gráfica del paso 2 sí cambia. La Figura 6 muestra esa gráfica, correspondiente al calentamiento homogéneo del sistema, partiendo del estado base a  $-20^\circ\text{C}$ .

Las coordenadas de los puntos notables de la poligonal van surgiendo así:

$$Q_A = \text{calor necesario para llevar 200 g de aluminio de } -20^{\circ}\text{C a } 0^{\circ}\text{C} +$$

calor necesario para llevar 800 g de hielo de  $-20^{\circ}\text{C}$  a  $0^{\circ}\text{C}$

$$= (200\text{g})\left(0,215\frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}}\right)(20^{\circ}\text{C}) + (800\text{g})\left(0,5\frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}}\right)(20^{\circ}\text{C}) = 8860\text{ cal}$$

$$Q_{AB} = \text{calor necesario para fundir 800 g de hielo a } 0^{\circ}\text{C}$$

$$= (800\text{g})\left(80\frac{\text{cal}}{\text{g}}\right) = 64000\text{ cal}$$

$$Q_B = Q_A + Q_{AB} = 8860\text{ cal} + 64000\text{ cal} = 72860\text{ cal}$$

Ya este punto sobrepasa el punto P que representa el estado final del sistema, porque

$$72860\text{ cal} > 56720\text{ cal } Q_B > Q_P \text{ (Figura 6).}$$

La conclusión es que la temperatura final del sistema (coordenada Y del punto P) es  $0^{\circ}\text{C}$ . Todo el sistema queda a esa temperatura. De los 800 g de agua que tiene el sistema,

la cantidad que queda en estado líquido se puede calcular en base al calor que ha absorbido el sistema desde el punto A (donde toda el agua está aún sólida), es decir,

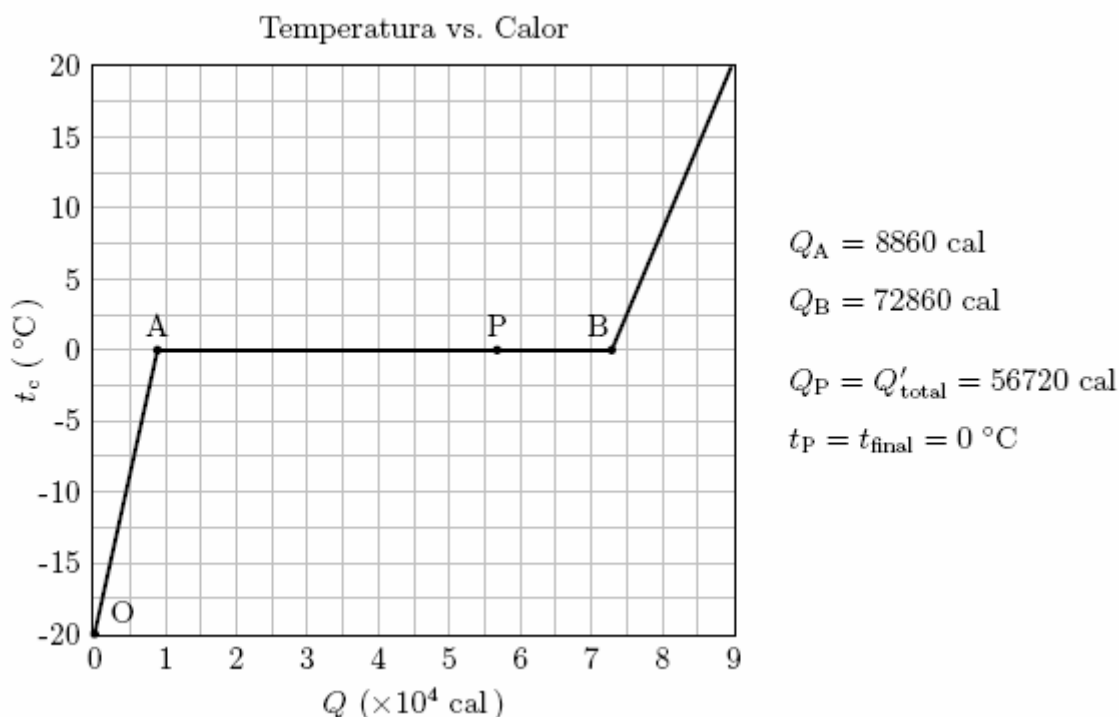
$$Q_P - Q_A = 56720\text{ cal} - 8860\text{ cal} = 47860\text{ cal}$$

$$m_l = \frac{Q_P - Q_A}{L_f} = \frac{47860\text{ cal}}{80\frac{\text{cal}}{\text{g}}} = 598,25\text{ g}$$

La masa de hielo (agua en estado sólido) que queda es

$$m_s = 800\text{ g} - m_l = 800\text{ g} - 598,25\text{ g} = 201,75\text{ g}$$

Finalmente vale la pena hacer notar que la solución de la parte b) del problema, en cada una de sus dos posibilidades (segundo bloque al comienzo o al final del proceso de la parte a)), mediante el método de ensayo y error hubiera implicado comenzar de nuevo desde cero el problema. Con el método aquí expuesto se hacen algunas modificaciones al análisis de la parte a) y se obtiene fácilmente la solución de la nueva situación. En particular se prueba que el estado final de equilibrio depende de todos los cuerpos presentes en el sistema y no del orden en que se van agregando al mismo. Esta es una propiedad general de este tipo de procesos.



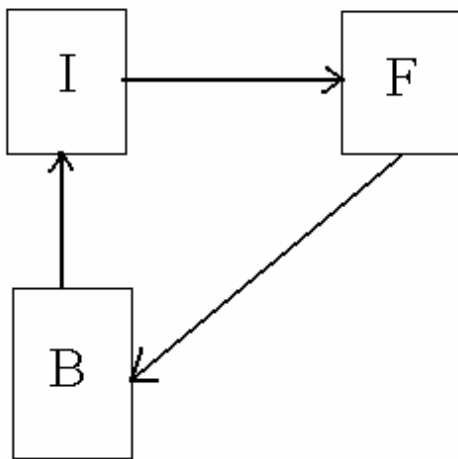
**Figura 6.** Gráfica para la parte b

**Demostración teórica del método:**

Imaginemos someter al sistema al proceso cerrado mostrado en la Figura 7. Partiendo del estado base (B) calentamos por separado los cuerpos del sistema hasta obtener el estado inicial dado en el problema (I). Luego dejamos que hayan los intercambios espontáneos dentro del sistema que lo dejan en el estado final de equilibrio térmico (F). Por último, enfriamos homogéneamente el sistema hasta regresarlo al estado base. Todo es hecho a presión atmosférica.

Vamos a aplicar la 1ª Ley de la Termodinámica al sistema formado por los N cuerpos que recorre ese proceso cerrado:

$$\Delta E = Q - W \tag{5}$$



**Figura 7.** Proceso cerrado.

Veamos:

**Energía:**

El sistema parte del estado base y regresa al estado base. La energía total del sistema es una función de estado. Por tanto

$$\Delta E = 0$$

**Trabajo:**

Los cuerpos del sistema pueden sufrir expansiones o contracciones térmicas a lo largo del proceso cerrado. Pero como en todo momento están sometidos a la presión atmosférica, el trabajo que realiza cada uno de ellos se puede calcular según la fórmula isobárica:

$$W_i = P_{atm} \Delta V_i \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, N$$

Cada cuerpo regresa a su estado original dentro del estado base, es decir  $\Delta V_i = 0$ . Por tanto  $W_i = 0$  y el trabajo total será nulo:  $W = \sum_i W_i = 0$

**Calor:**

De la ecuación (5) vemos entonces que el calor total suministrado al sistema Q durante el proceso cerrado es nulo:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 0 \\ W &= 0 \end{aligned} \Rightarrow Q = 0$$

Pero ese proceso consta de 3 etapas:  $\begin{cases} B \rightarrow I \\ I \rightarrow F \\ F \rightarrow B \end{cases}$

Luego podemos afirmar que  $Q_{BI} + Q_{IF} + Q_{FB} = 0$

El proceso  $I \rightarrow F$  es espontáneo; no requiere de ningún calor de origen externo:  $Q_{IF} = 0$ . Por tanto obtenemos que  $Q_{BI} + Q_{FB} = 0 \Rightarrow Q_{FB} = -Q_{BI}$ .

Ahora recordemos el paso 2 del método: Trazado de la gráfica Temperatura vs. Calor. Partiendo del estado base, el sistema era calentado homogéneamente hasta el estado final e incluso más allá porque no se sabía exactamente donde queda éste último. Ese proceso es reversible, al menos en lo que se refiere a nuestro sistema de N cuerpos. Por esto, obtenemos entonces el enfriamiento homogéneo de que estamos hablando en esta sección. Para la porción desde el estado final hasta el estado base nos da un calor que es igual pero de signo opuesto al calentamiento:  $Q_{FB} = -Q_{BF}$ , con lo cual:  $Q_{BF} = Q_{BI}$ .

Esta igualdad entre calores es lo que justifica la validez del método. En la gráfica que representa el conjunto completo (continuo) de estados finales posibles, seleccionamos aquel que corresponde a un calor igual al que se necesita para llevar al sistema desde el estado base al estado inicial mediante calentamientos separados de sus cuerpos.

**RESULTADOS**

Los resultados obtenidos se dividirán en 4 partes: La primera está relacionada con el diagnóstico de los profesores de un ejercicio de esta índole con solamente dos cuerpos.

La segunda sobre el trabajo de los estudiantes para resolver este ejercicio solamente con dos cuerpos sin ningún método especial.

La tercera sobre la aplicación de este método a dos cursos y su evaluación.

La cuarta sobre la reacción de los profesores cuando se les explicó el método.

- I. Se aplicó la siguiente encuesta a los profesores solicitando que nos dieran por escrito la solución del ejercicio y contestaran algunas preguntas:

### ENCUESTA SOBRE PROBLEMAS DE EQUILIBRIO TÉRMICO CON CAMBIOS DE FASE

1. Resuelva el siguiente problema:

La tabla suministra las características térmicas necesarias para resolver el siguiente problema:

En un recipiente refractario se tiene 20 kg de cobre fundido (a 1200°C). Se introducen dos cuerpos sólidos a 20°C: 5 kg de aluminio y 5 kg de cobre.

Encontrar el estado de equilibrio térmico del sistema.

Substancia	Calor específico sólido $\left(\frac{kJ}{kg \cdot K}\right)$	Punto de fusión (K)	Calor latente de fusión $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$	Calor específico líquido $\left(\frac{kJ}{kg \cdot K}\right)$
Aluminio	0.900	933	90.0	1.05
Cobre	0.387	1356	134	0.423

2. Comente sobre las dificultades que se presentan al resolver problemas de este tipo:
- En el aspecto científico.
  - En el aspecto pedagógico.
3. Si estos problemas los resuelve con sus estudiantes y por qué.

De cinco profesores, solamente uno nos dio por escrito la solución y en ella planteaba el famoso método de ensayo y error. Los demás profesores, de forma oral nos comentaron que era muy extensa la solución y por eso no la hicieron.

- II. Este mismo ejercicio se aplicó como trabajo de casa a estudiantes del grupo del profesor Antonio Mejía, en el año 2006, después de haber visto la teoría del texto guía, la cual no tiene un "método" para resolver los problemas, excepto el de "ensayo y error". Ningún estudiante resolvió este problema de forma correcta.

- III. En el 2° semestre de 2007, se explicó este método a dos cursos de los autores y en un parcial se preguntó un ejercicio similar, teniendo un alto porcentaje (más del 60%) de estudiantes que resolvieron este problema de forma correcta. Lo cual, contrasta con todos los resultados anteriores.

- IV. En este mismo semestre (2°-2007) se organizó un corto seminario, donde a los profesores se les explicó el método, teniendo como resultado la aceptación de todos ellos para aplicarlo, implementarlo y evaluarlo en los siguientes semestres.

### DISCUSIÓN

La gráfica T vs. Q es una aproximación al comportamiento térmico de la sustancia, utilizada en los cursos de física fundamental, no se está manejando el calor Q como si fuera una función de estado, se trata simplemente de la relación entre dos variables (T y Q) en un proceso bien definido como es el calentamiento a presión constante. Las dependencias de  $c_p$  con la temperatura no invalidan el método, ya que, en la demostración dada (que por supuesto es propuesta y abierta al debate) no se hace uso de los detalles de la relación T vs. Q. Lo que es incuestionable es que el método funciona correctamente para resolver cualquier problema de este tipo dentro del modelo de la física general y lo hace de una manera sencilla. Consideramos que este procedimiento no es sólo una estrategia didáctica; es una nueva herramienta de análisis de ciertos procesos termodinámicos.

### CONCLUSIONES

Toda nueva metodología parece difícil al comienzo. Pero con la práctica se torna fácil. Se llama la atención hacia el hecho de que todo el procedimiento aquí propuesto para resolver los problemas de equilibrio térmico con cambios de fase se basa en la aplicación repetida de sólo dos fórmulas:

$$Q = mc\Delta T$$

$$Q = mL$$

La secuencia dirigida y racional en que se efectúa es lo que hace la diferencia. El estudiante puede buscar problemas propuestos en los textos de física general donde se suministre el estado inicial completo de un sistema y se exija hallar el estado final. Al entrenarse en el uso del

método de la gráfica, lo asimilará como herramienta digna de confianza.

Para finalizar, podemos concluir que la utilización de este método no dará lugar a bloques de trabajo perdido, esfuerzos mentales innecesarios e incertidumbre sobre las conclusiones; sin embargo, todavía se debe implementar y generalizar en todos los grupos de la asignatura de fluidos y termodinámica para valorar el grado de efectividad y de receptividad por parte de los estudiantes y de los profesores.

#### LITERATURA CITADA

- SEARS, F.; ZEMANSKY, M.; YOUNG, H. Y FREEDMAN, R. Física universitaria. Vol. 1. 11ª edición. Editorial Pearson Educación. Ciudad de México, México. 2004, 791 págs.
- RESNICK, R.; HALLIDAY, D. y KRANE, K. Física. Vol. 1. 4ª edición. Editorial CECSA. Ciudad de México, México. 2004, 566 págs.
- SAVÉLIEV, I. V. Curso de Física General. Tomo I. Editorial MIR. Moscú, Rusia. 1984, 456 págs.
- ALONSO, M. y FINN, E. Física. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Estados Unidos. 1995, 969 págs.
- ROLLER, D. y BLUM, R. Física: mecánica, ondas y termodinámica. Vol. 2. Editorial Reverté. Barcelona, España. 1986, 458 págs.
- JEWETT, J. Energy and the confused student III: language. The physics teacher, 2008, 46: 149-153.
- RIVEROS, H. y OLIVA, A. Is the water heating curve as described? Physycs Education, 2008, 43 (2): 180-184.
- TIPLER, P. Física. 3ª edición. Editorial Reverté. Barcelona, España. 1992.
- YORY, J. y MEJÍA, A. Matlab para física general. Javegraf. Bogotá, Colombia. 2003, 116 págs.